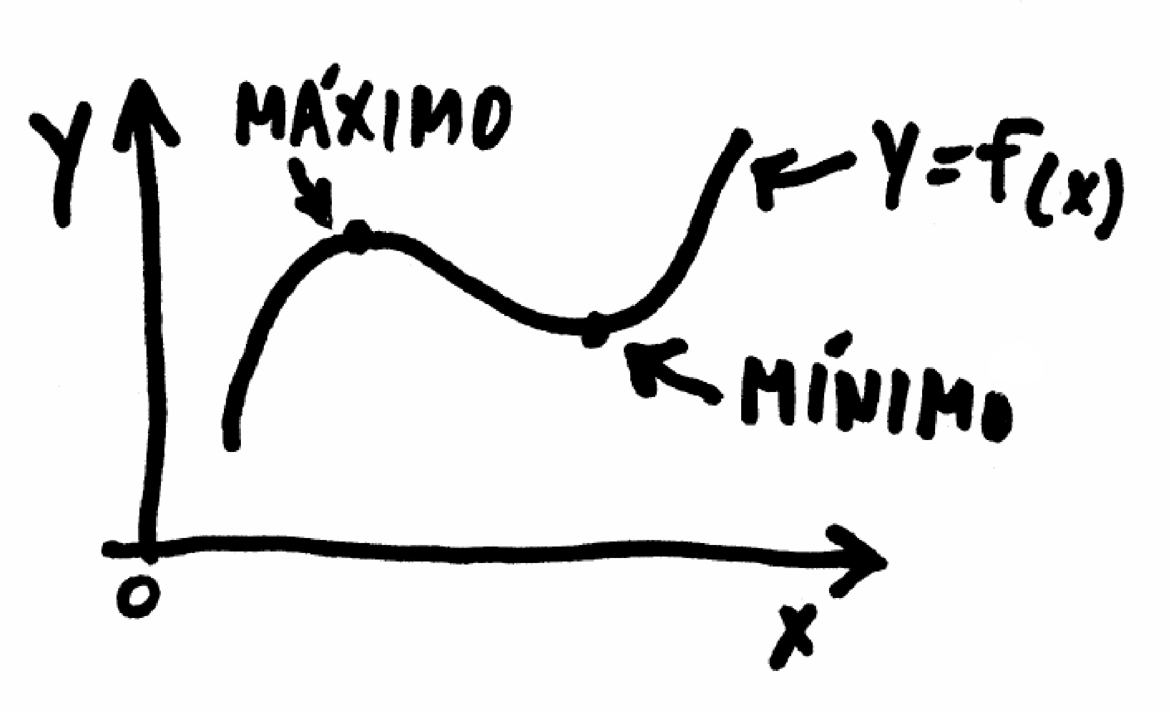
# FUNCIONES



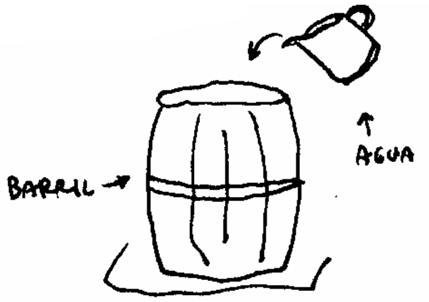
# FUNCIONES

Vamos a empezar a hablar de Funciones. Supongamos que queremos saber cuántos alumnos hay por aula. Voy aula por aula y cuento. Hago una tabla:

| AULA | ALUMNOS |
|---|---|
| 310 | 90 |
| 311 | 80 |
| 320 | 100 |

De esta manera establecemos una relación entre el aula y el número de alumnos. El conjunto del cual salimos lo llamo **dominio** de la función. Al conjunto de llegada lo llamo **codominio** de la función. Si para cada elemento del dominio, tengo un solo elemento del codominio, tengo una **función**.

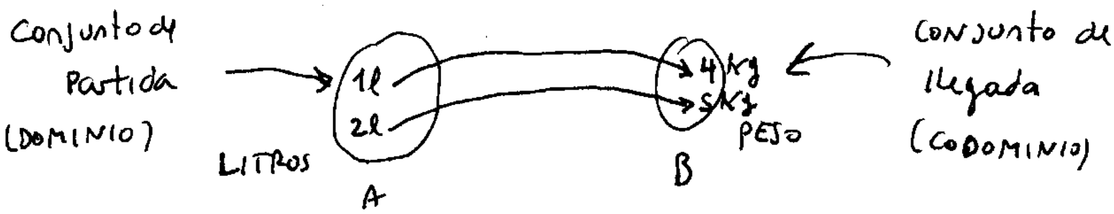
Supongamos que tengo un barril que vacío pesa 3 Kg. Si le agrego agua, el peso del barril va a aumentar. Como cada litro de agua pesa 1 Kg. La tabla me va a quedar así:




| LITROS | PESO |
|---|---|
| 0 | 3 kg |
| 1 l | 4 kg |
| 3 l | 6 kg |

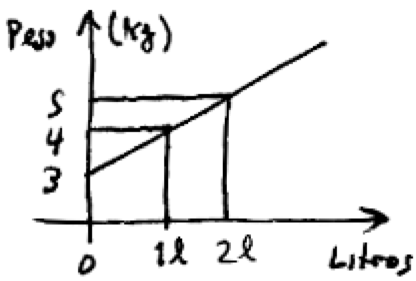
← TABLA

Esto que hice fue establecer una <u>relación</u> entre los litros que pongo y el peso del barrilito de cerveza. Puedo simbolizar esto así:




Hacer una tabla con algunos valores es dar una función. Sin embargo, esto no sirve mucho porque… ¿ qué pasa si yo pongo un litro y medio ? O raíz de 2 litros ?
De manera que otra forma de establecer una función es <u>dar su gráfico</u>.

Dibujo ahora el peso del barril en función de la cantidad de agua que pongo :




← GRÁFICO DEL PESO DEL BARRIL EN FUNCIÓN DE LOS LITROS QUE PONGO

Las funciones pueden ser discretas o continuas. Cuando hablo del número de personas por aula, estoy hablando de una función discreta. Cuando hablo de los litros que pongo estoy hablando de una función continua.
Existe otra forma de dar una función que es dar su fórmula. Para decir de donde a donde va la función uso la siguiente notación:

$$f : \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{nros naturales}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{nros reales}}$$

(una función que va de los naturales a los Reales)

La función también podría ir de los reales a los reales o cualquier otra combinación. Por ejemplo:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{etc.}$$

Supongamos ahora que tengo la siguiente función:

$f_{(m)} : \mathbb{N} \longrightarrow Z$ <--- Enteros

$f_{(x)} : \mathbb{R} > 0 \longrightarrow \mathbb{R} > 0$

con $f_{(x)} = \dfrac{10}{x}$

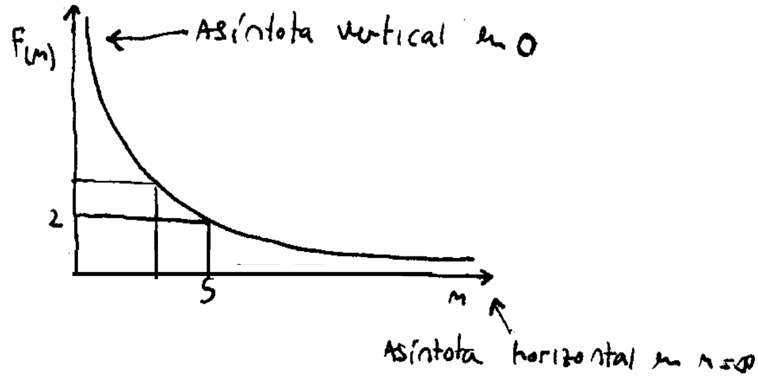
Hago una tabla para esta función:

| $m$ | $f_{(m)}$ |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 5 |
| 4 | 2,5 |
| 5 | 2 |
| 10 | 1 |

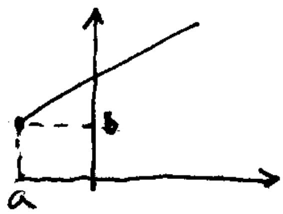
← $f_{(m)} = \dfrac{10}{m}$

El gráfico va a ser:

Asíntota significa que la función se acerca al eje pero NO lo corta.

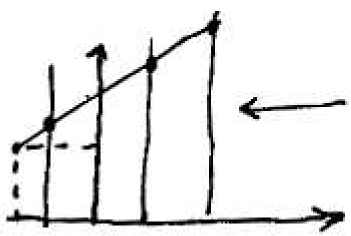



Vamos a un ejercicio. Una cosa para ser función tiene que salir de 1 punto y llegar a un solo punto. Por ejemplo, supongo que me dan esto:



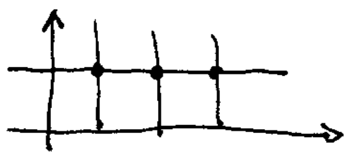

Me piden determinar si es función o no.

Lo que hago es trazar <u>rectas verticales</u>. Si las rectas cortan al gráfico en <u>1 solo punto</u>, tengo una función. Esto es porque a cada punto del dominio, le debe corresponder un solo punto del codominio.



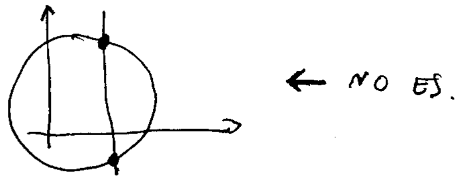
Estas rectas verticales cortan en un solo punto. ⇒ ES FUNCIÓN.

Este caso también es función

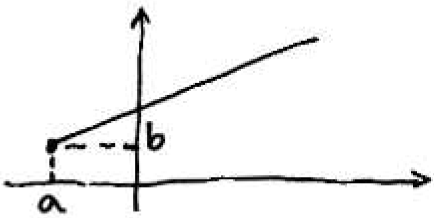


ES FUNCIÓN (las rectas cortan en un solo punto).

NO es función. (otra recta superpuesta la corta en infinitos puntos).




El domino de la función serán todos los puntos que tienen alguna imagen. El codominio será el conjunto que contenga a la imagen. En este caso:



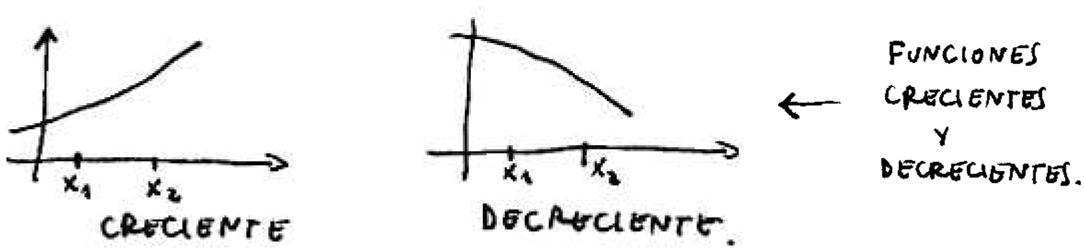

DOMINIO: $\mathbb{R} \geq a$

IMAGEN: $\mathbb{R} \geq b$

CODOMINIO: $\mathbb{R}$. (o $\mathbb{R} > 0$)

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Esto es fácil. Fijate: Una función crece cuando va en subida. Una función decrece cuando va en bajada.




Desde el punto de vista matemático esto se pone así:

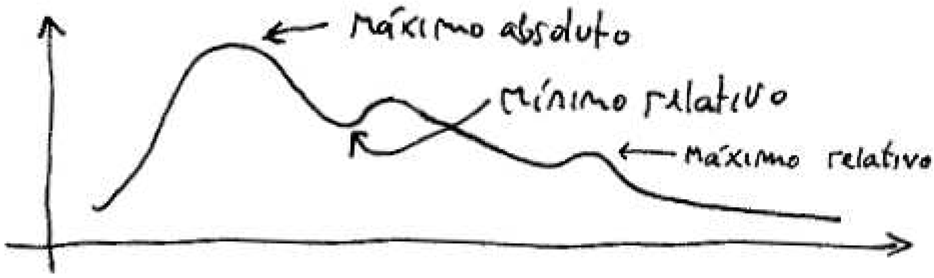
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ← FUNCIÓN CRECIENTE

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ← FUNCIÓN DECRECIENTE

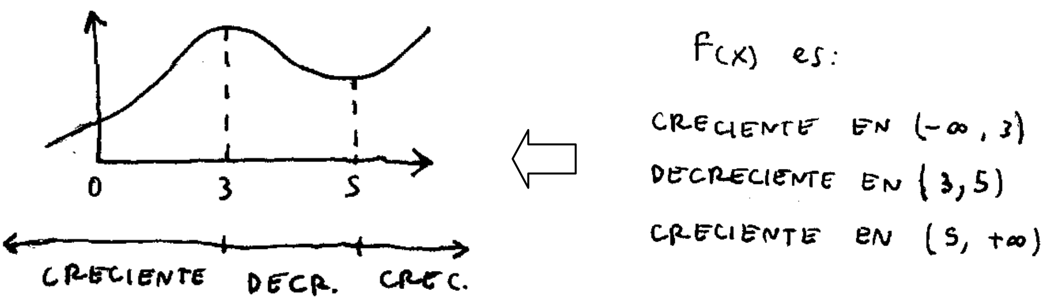
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Cuando la función tiene una montaña, digo que tiene un máximo. Cuando tiene un valle, digo que tiene un mínimo. Una función puede tener varios máximos o varios mínimos. Si el máximo es el más grande de todos los que tienen la función, digo que es un máximo absoluto. Lo mismo para los mínimos.

En realidad, desde el punto de vista de matemático (riguroso) una función tendrá un máximo o un mínimo cuando cambie el estado de crecimiento (de creciente a decreciente o viceversa). Si la función crece entre los puntos 1 y 2, digo que el intervalo de crecimiento es (1, 2). Dar el intervalo de crecimiento (o decrecimiento) es decir en qué puntos la función crece (o decrece). Fijensé este dibujito :




En matemática es muy importante que cuando vean una función puedan decir cuáles son sus intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y todo eso. Fijensé este ejemplo.




---

Vamos a hacer un ejercicio. Es importante que aprendas a interpretar enunciados. Eso queremos.

> UNA FAMILIA QUE POR MES RECORRE 3.000 KM EN UN AUTO SE PLANTEA LA POSIBILIDAD DE INSTALAR UN EQUIPO DE GAS. LA INSTALACIÓN DEL EQUIPO CUESTA 1.500 \$. UN LITRO DE NAFTA CUESTA 0,69 \$. CON 1 Litro DE NAFTA RECORRE 14 Km. CON 0,8 $m^3$ DE GAS TAMBIÉN RECORRE 14 Km. EL GAS CUESTA 0,32 \$ EL $m^3$ . SE PIDE:
> HALLAR LA FUNCIÓN QUE MIDE EL GASTO ( EN \$ ) DE COMBUSTIBLE EN FUNCIÓN DEL TIEMPO SI SE USA NAFTA. IDEM EN CASO DE QUE SE UTILICE GAS ( INCLUIDO EL GASTO DE LA INSTALACIÓN )

En los 2 casos la variable va a ser el tiempo medido en meses. Vamos a empezar con la función del gasto de combustible. El tipo hace 3000 Km. por mes y con 1 Litro de nafta recorre 14 Km. Entonces:

Por mes gasta: $\dfrac{3.000\ \text{L}}{14}$ = 214,28 Litros /mes

Lo que gasta en plata va a ser: ( 1 Litro de nafta cuesta 0,69 $ )

$$214{,}28 \text{ L/mes} \times 0{,}69 \text{ \$/Litro} = 147{,}85 \text{ \$/mes}$$

Si por mes gasta esto, la función que me da el gasto en función del tiempo es:

$$f_{(t)} = 147{,}85 \text{ \$/mes} \times t \text{ (en meses)}$$

Vamos a la parte b). Con 0,8 $m^3$ la familia Dongo recorre 14 Km. La cantidad de $m^3$ que gastan al recorrer 3.000 Km es:

$$14 \text{ Km} \text{ ——— } 0{,}8 \text{ m}^3$$
$$3000 \text{ Km} \text{ ——— } x = \frac{3000 \text{ Km} \cdot 0{,}8 \text{ m}^3}{14 \text{ Km}}$$

➔ GASTO MENSUAL = 171,42 $m^3$ de gas

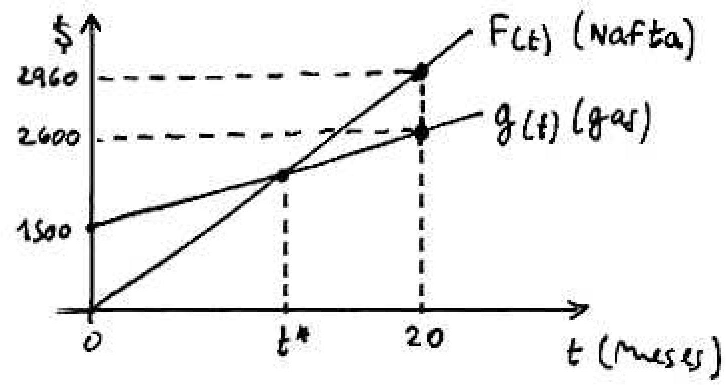
Es decir que en plata, lo que gasta es: 171,42 $m^3$ x 0,32 $ / $m^3$ = 54,85 $/mes

Si le sumo lo que sale la instalación, el gasto en función del tiempo si uso gas es:

$$g_{(t)} = 1500 \text{ \$} + 54{,}85 \frac{\text{\$}}{\text{mes}} \cdot t_{\text{(meses)}}$$

Adelantémonos un poco al tema de funciones lineales. Represento las dos funciones que obtuve. Puedo hacerlo dando valores. Me van a dar 2 rectas

$$f_{(t)} = 148\, t$$
$$g_{(t)} = 1500 + 55\, t$$




Supongamos que quiero saber a partir de cuantos meses se amortiza la instalación. Eso significa hallar el punto en donde se cortan las rectas, es decir t*.

Igualo: f(t) = g(t) $\Rightarrow$ $148\, t = 1.500 + 55\, t$

$$\Rightarrow 148\, t - 55\, t = 1.500$$

$\Rightarrow$ 93 t = 1.500

$\Rightarrow$ <u>t = 16,1 meses</u>

---

OTRO EJEMPLO

Supongamos que hay una empresa que tiene unos ingresos (en plata) que vienen dados por la función i(t) (t en días). Los gastos a su vez vienen dados por g(t).
¿ Qué representa la función $h(t) = i(t) - g(t)$ ?

**Rta**: Bueno, si a lo que entra le resto lo que salte, lo que me queda es la ganancia neta de la empresa. Es decir:

$$h(t) = i(t) - g(t) = \text{ganancia neta}$$

¿ Para que sirve este ejemplo ? Bueno, solamente para que veas que las funciones se pueden sumar y restar.

---

OTRO EJEMPLO

Supongamos que tengo un país determinado tal que h(t) representa a la cantidad de habitantes de ese país en el tiempo t (t en años). La función g(t) representa el consumo por habitante en función del tiempo. Se pregunta:

a) ¿Cuál es el consumo total de ese país en el año t?
Igual que antes lo que hago es:

CONSUMO POR HABITANTE x CANTIDAD DE HABITANTE = CONSUMO TOTAL

$\Rightarrow$ Si f(t) es el consumo total:

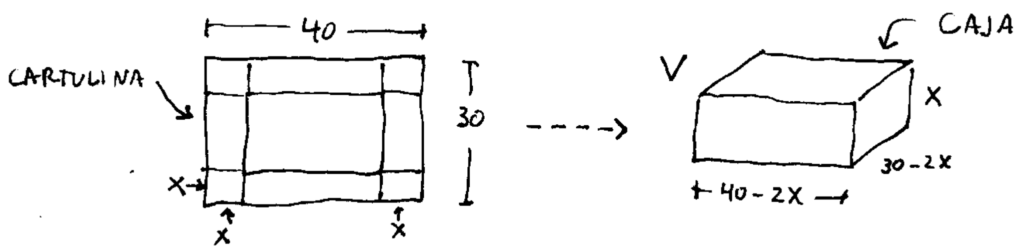
$$f(t) = h(t) \times g(t) \quad \longleftarrow \quad \text{FUNCIÓN QUE DA EL CONSUMO TOTAL}$$

Acá ves como una función puede ser producto de 2 funciones. Ahora, ¿ Cuánto valen las funciones h y g ? Rta: Bueno, no lo sé. Pero su producto da el consumo total.

---

EJEMPLO

Che, ¿ se callan ? Vamos a hacer un ejercicio. Se quiere hacer una caja partiendo de una cartulina de 30 cm x 40 cm. Se pide calcular el volumen de la caja.



El volumen de la caja será: Vol = ancho x alto x largo. Es decir:

$$V = (40 - 2x)\,(30 - 2x)\,.\,x$$

Ahora, x no va a poder tomar valores mayores que 15 cm. Porque sino no tendría caja. Tampoco x puede ser negativo. Entonces digo que la función que me da el volumen de la caja en función de x es:

$$V(x) = (40 - 2x)\,(30 - 2x)\,.\,x \qquad \text{con } 0 < x < 15$$

¿ Cómo hago si quiero graficar esto ? Bueno lo que hago es darle valores a x (entre 0 y 15 ) y sacar los de V(x).

---

Vamos a otro ejemplo

Supongamos que los precios de la electricidad son los siguientes:

2,38 $ costo fijo que paga todo el mundo
0,0634 $ / kilowatt si uno consume menos de 126 Kwh.
0,094 $ / kilowatt si uno consume más de 126 Kwh.

Encima de esto, se cobra 17,20 % de impuesto sobre el total consumido. De manera que voy a tener 2 funciones: una para consumo mayor que 126 Kwh. y otra p/ consumo menor que 126 Kw-h. Si no hubiera que pagar ese 17,20 % de más, lo que habría que pagar sería:

$$f_{(x)} = \begin{cases} 0{,}0634\,.\,X + 2{,}38 & \text{si } X \leq 126 \text{ Kwh} \\ 2{,}38 + 0{,}0634\,.\,126 + 0{,}094\,(X - 126) & \text{si } X > 126 \text{ Kw-h} \end{cases}$$

Ahora, para aumentar una cosa un 17,20 % lo que se hace es multiplicar a todo por $\frac{17.20}{100}$ y sumárselo a lo que uno ya tenía. (Esto hay que pensarlo un poco)

De manera que la función que me dice lo que tengo que pagar (f(x)) en función de los kilowats-hora que consumo (x) va a ser lo que tenía antes multiplicado por $1 + \frac{17{,}2}{100}$. $a\left(1 + \frac{17{,}20}{100}\right)$ . Esto es porque hacer la cuenta $a + \left(\frac{17{,}20}{100}\right)a$ es lo mismo que hacer ( Lo que hice es sacar a factor común).

La función queda:

$$f_{(x)} = \begin{cases} 1{,}172 \times \left[0{,}0634\,.\,X + 2{,}38\right] & \text{si } X \leq 126 \text{ Kw-h} \\ 1{,}172 \times \left[2{,}38 + 0{,}0634\,.\,126 + 0{,}094\,(X - 126)\right] & \text{si } X > 126 \end{cases}$$

Esta función así definida es lo que el problema pedía calcular. Teniendo la función ésta, puedo calcular por ejemplo cuánto paga un tipo que consumió 122 Kw. (por ejemplo). Para hacer eso, reemplazo <u>x</u> por 122 en la función para $x \leq 126$ Kwh.

Quedaría así :

$$\text{Plata a pagar} = 1.172 \times [\,0{,}0634\ .\ \mathbf{122} + 2{,}38]$$

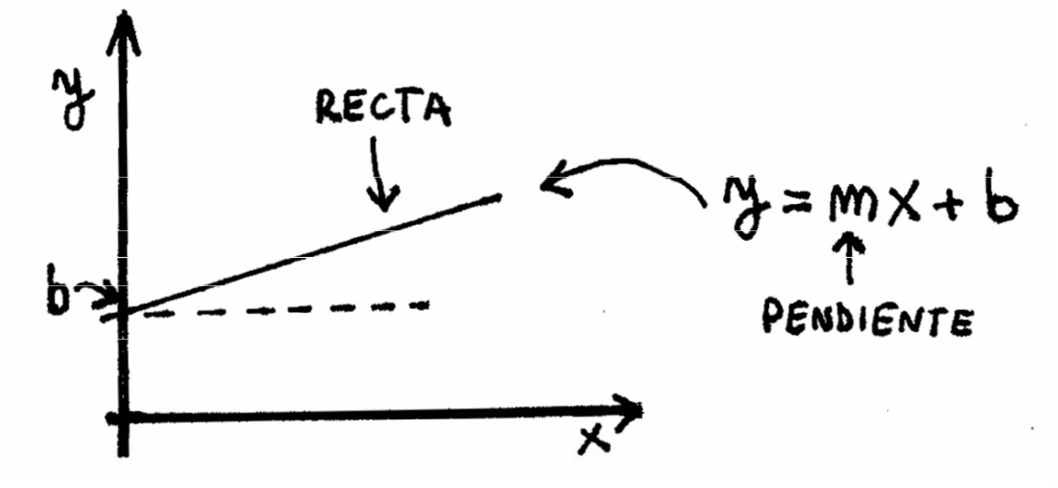
Si el consumo fuera <u>mayor</u> a 126 Kw. (por ejemplo **130** Kw), la cosa quedaría:

$$\text{Plata a pagar} = 1.172 \times [2{,}38 + 0{,}0634 \times 126 + 0{,}094\ (\mathbf{130} - 126)]$$

---

FIN FUNCIONES

# FUNCIONES LINEALES



# FUNCIONES LINEALES

Son las funciones que tienen forma de línea recta. La expresión matemática es:

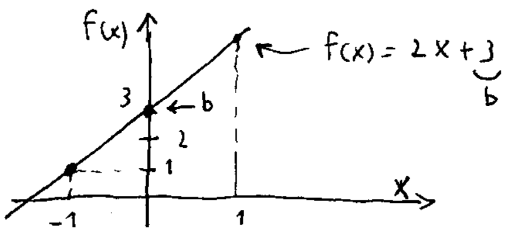
$$f_{(x)} = m\,x + b \longleftarrow \text{FUNCIÓN LINEAL}$$

La b es la ordenada al origen, es decir, el lugar donde la recta corta al eje y. La m es la pendiente de la recta. Esta pendiente se calcula haciendo la cuenta:

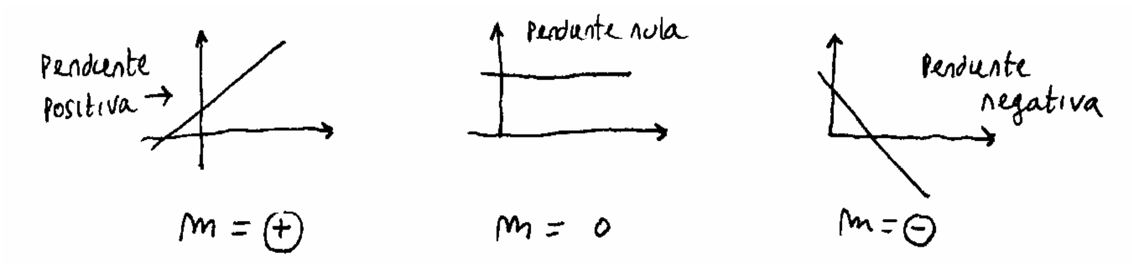
$$\boxed{m = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}}$$

Supongamos que me dan la siguiente función lineal: $f_{(x)} = 2x + 3$. Voy a graficar esto. ¿Cómo hago? Y bueno. Le doy valores a x y saco los de $f_{(x)}$.

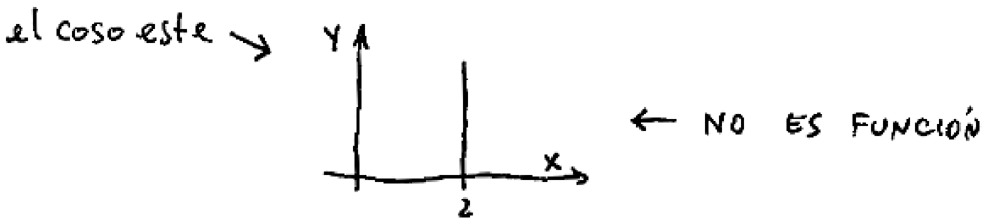
| x | f (x) |
|---|---|
| 0 | 3 |
| -1 | 1 |
| 1 | 5 |




Hay algo importante que tenés que saber y es la cuestión de la pendiente. Tengo 3 casos. Mirá :




Ahora, ojo ! Las rectas verticales no son función. Ver acá :




En este caso, la ecuación de esta recta sería x = 2. Esto pasa porque otra recta vertical superpuesta "corta" a la recta x = 2 en más de 1 punto. En realidad la corta en ∞ puntos porque está superpuesta. Vamos a un ejemplo.

**SE SABE QUE UNA FUNCIÓN LINEAL TOMA LOS SIGUIENTES VALORES: $f_{(2)}$ = 3 y $f_{(4)}$ = 7. HALLAR LA ECUACION DE LA FUNCION**

Bueno, lo que hago es escribir la ecuación de una función lineal: $f(x) = m\,x + b$. Reemplazo ahora por los valores que me dieron:

$$f_{(2)} = m.\,2 + b = 3$$

$$f_{(4)} = m.\,4 + b = 7$$

Esto es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Lo puedo resolver por cualquier método.

$$\begin{cases} 2m + b = 3 \\ 4m + b = 7 \end{cases}$$

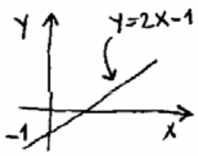
Despejo b de la 1ra y la reemplazo en la 2da:

$$b = 3 - 2\,m \quad \Rightarrow \quad 4\,m + (3 - 2\,m) = 7$$

$$\Rightarrow 4\,m + 3 - 2\,m = 7 \quad \Rightarrow \quad 2\,m = 7 - 3$$

$$\boxed{m = 2} \longleftarrow \text{VALOR DE LA PENDIENTE}$$

Reemplazo ahora m = 2 en cualquiera de las ecuaciones y saco b. Fíjate :




$$2m + b = 3 \Rightarrow 2.2 + b = 3$$

$$\Rightarrow 4 + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 4$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -1} \longleftarrow \text{ORDENADA AL ORIGEN}$$

Quiere decir que la función buscada es : $\boxed{f(x) = 2\,x - 1}$

Ahora vamos a hacer esto para un caso general. Quiero obtener una fórmula general que va a valer para todos los casos . La idea es poder ahorrarme de trabajar con un sistema de 2 x 2 . Entonces :

$$f(x_1) = y_1$$

$$f(x_2) = y_2$$

me queda: $\begin{cases} m\,x_1 + b = y_1 \\ m\,x_2 + b = y_2 \end{cases}$

Voy a resolver este sistema restando miembro a miembro. A la 1$^{ra}$ ecuación le resto la 2$^{da}$. Esto queda:

$$m x_1 - m x_2 = y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow m(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}} \longleftarrow$$

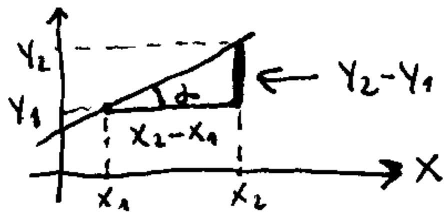
FÓRMULA PARA SACAR LA PENDIENTE

Vamos a ver si cumple con el ejercicio anterior. Yo tenía f(2) = 3 y f(4) = 7. Tonces:

$x_1 = 2$ , $y_1 = 3$
$x_2 = 4$ , $y_2 = 7$

$$\Rightarrow m = \frac{3-7}{2-4} = \frac{-4}{-2} = \underline{\underline{2}} \quad (\text{verifica})$$

¿Cuál es el significado de esta fórmula? Bueno, lo puedo ver en este dibujo:




Es decir, lo que hace la fórmula es calcular la pendiente haciendo la cuenta opuesto sobre adyacente.

---

OTRO EJEMPLO

USANDO LA FORMULA PARA LA PENDIENTE,
CALCULAR m SABIENDO QUE f(2) = 1 y f(5) = -3

Entonces, tengo que tener una función lineal del tipo f(x) = m x + b donde la pendiente viene dada por la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

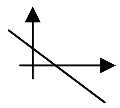
En este caso $x_2 = 5$, $y_2 = -3$ y $x_1 = 2$ e $y_1 = 1$. Entonces:

$$m = \frac{-3-1}{5-2} = \frac{-4}{3} \Leftarrow$$

PENDIENTE DE LA RECTA

Fijate que me dio con signo negativo. ¿ Qué me indica el signo menos ?

Rta: Bueno, que la pendiente es **negativa**, es decir que la recta tiene que ir así:



Ahora planteo que:

$f(x) = -4/3\ x + b \quad \Rightarrow \quad$ Reemplazo x por 2 y f(x) por 1:

$1 = -4/3 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad$ De acá despejo b que me da:

$1 + 8/3 = b$

$\Rightarrow \boxed{b = 11/3} \longleftarrow$ ORDENADA AL ORIGEN

La función lineal buscada es: $f(x) = -4/3\ x + 11/3$

---

OTRO EJEMPLO

UNA RECTA PASA POR EL PUNTO P = ( 3, -4) y SU PENDIENTE ES m = - 2. HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA:

Lo que hago es esto: La ecuación tiene que ser: $y = -2\ x + b$ ( porque $m = -2$ )

Como la recta pasa por $x = 3$ e $y = -4$, reemplazo y me queda:

$$-4 = -2 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad -4 + 6 = b$$

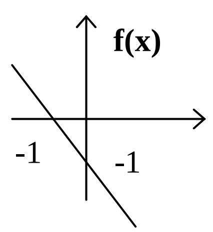
$$\Rightarrow \quad b = 2$$

La función dada va a quedar: $\boxed{y = -2\ x + 2}$

---

OTRO EJEMPLO

Ahora me dan este gráfico y me piden hallar la ecuación correspondiente. Mirá Es como si nos dieran 2 puntos. Sé que la recta corta al eje y en el punto -1. Entonces
b = - 1. Ahora saco m. Los dos puntos por donde pasa la recta son (-1, 0) y (0, -1). Tengo 2 puntos y puedo sacar la pendiente con:




$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ . Dio negativo.}$$

Está ok porque la recta va así: ↘

La ecuación buscada va a ser: $\boxed{y = -1\ x - 1}$

---

## INTERVALOS

Esto lo vas a entender mejor si ves un ejercicio. Fijate. Copien. Dicto:

EJERCICIO

DADAS f(x) y g(x) DETERMINAR EL CONJUNTO A DEFINIDO

COMO: $A = \{ x \in \mathbb{R} \, / \, f(x) \geq g(x) \}$

$f(x) = 3x + 2$

y $g(x) = 2x - 1$

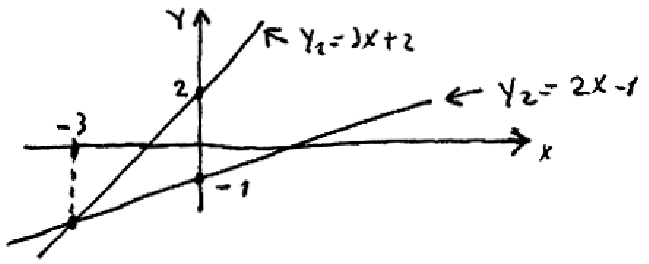
Lo que tengo que calcular son los x que $\in$ a los reales tales que f(x) sea mayor o igual que g(x). Es decir, planteo:

$$3x + 2 \geq 2x - 1$$

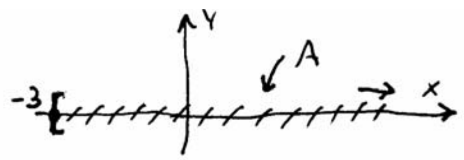
Resuelvo esta inecuación pasando a un miembro todo lo que tiene x.

$$3x - 2x \geq -1 - 2 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3$$

Esta es la solución analítica del problema. Voy a resolverlo ahora gráficamente. Represento las 2 funciones:




Ahora, todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 \geq y_2$ son los $x \geq -3$. Eso lo saco mirando el gráfico. Veo que para cualquier $x \geq -3$ la recta $y_1$ está siempre por arriba de la $y_2$. Representando gráficamente el intervalo obtenido me queda:




$A = \{ x \in \mathbb{R} \, / \, x \geq -3 \}$

---

Vamos a otro ejemplo de intervalos. ¿ Si lo toman ? Sí, lo toman, pero es fácil. Fijate:

DADAS f(x) y g(x) DETERMINAR EL CONJUNTO A DEFINIDO

$f(x) = -2x + 1$ y $g(x) = 4x + 1$. COMO: $A = \{ x \in \mathbb{R} \, / \, f(x) \geq g(x) \}$

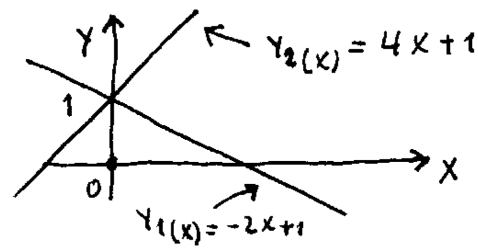
Piden lo mismo que antes. O sea, dar el intervalo en donde f(x) ≥ g(x). Bueno, planteo entonces que f(x) ≥ g(x), es decir:

$$-2x + 1 \geq 4x + 1 \Rightarrow 1 - 1 \geq 4x + 2x$$

$$\Rightarrow 0 \geq 6x \Rightarrow 0 \geq x \Rightarrow x \leq 0$$

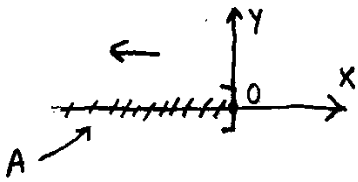
Entonces el conjunto solución será: $A = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq 0 \}$

Voy a representar las rectas en un gráfico para verificar lo que hallé:




Para hacer el gráfico tuve en cuenta que las ordenadas al origen eran 1 para las 2 rectas y que en un caso la pendiente era positiva y en el otro -, por lo tanto las rectas deberían ir así ↗ y así ↘ respectivamente.

Gráficamente la representación del conjunto A es:




$A = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq 0 \}$

Mirando el gráfico con las 2 rectas veo que siempre que tenga un <u>x ≤ 0</u> , la función será mayor que la g(x). (esto era justamente lo que yo buscaba).

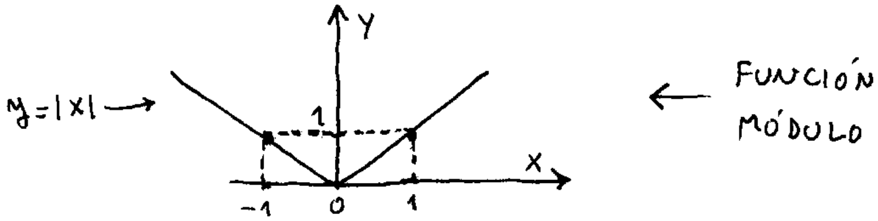
---

## <u>FUNCIÓN MÓDULO</u>

Acá presten un poco de atención porque siempre se confunden. Vamos a ver la función MODULO de equis. Tomar módulo significa considerar el <u>valor absoluto</u> de x. Esto se escribe: f(x) = |x|. Esto lo vamos a usar mucho. Le doy valores a x y saco los de f(x). Es decir, si x = 1, |x| será 1. Si x = -1, el |x| será también 1. Matemáticamente la función módulo de x se define así:

$$F_{(x)} = |x| \longrightarrow \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Represento esta función:




Esta función es como la función y = x pero igual de los 2 lados. El eje Y es el eje de simetría. Es como si el eje Y fuera un espejo.

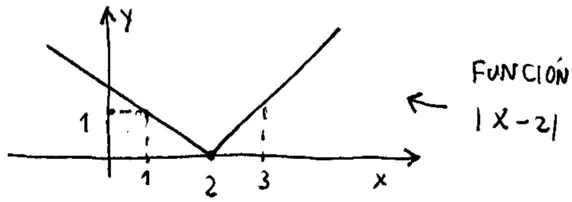
---

<u>EJEMPLO</u>

GRAFICAR LA FUNCION f(x) = |x - 2|

Lo que hago es darle valores a **x** y formar una tabla:

| X | f(x) |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1 |



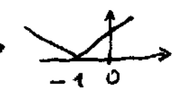
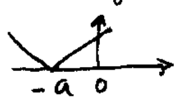

Esta función es igual a la función módulo de x ( |x| ) pero toda corrida para allá → en 2 lugares. Vamos a hacerlo ahora en forma analítica, es decir, aplicando la definición de módulo.

Fíjate. Tengo f(x) = |x - 2|. Eso significa que aplicando la definición me queda:

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \end{cases}$$

Ahora, x -2 ≥ 0 significa x ≥ 2 y x -2 < 0 significa x < 2. La función queda definida así:

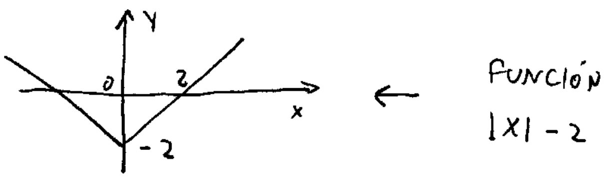
$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Si hubiera tenido la función F(x) = |X + 1| me quedaría así: →  . Si tengo la función F(x) = |X + a| queda siempre así: →  .

Fíjense ahora esta otra función: $f(x) = |x| - 2$. ¿ será igual que la anterior?

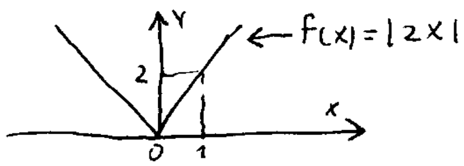
RTA: NO. Voy a hacer una tabla con valores y la represento:

| X | $\|X\| - 2$ |
|---|---|
| 0 | -2 |
| 1 | -1 |
| 2 | 0 |
| -1 | -1 |




Es decir, lo que pasa es que todo el gráfico se va para abajo en 2 unidades.
Si tuviera $f(x) = |a.x|$ me queda como la $|x|$ pero más abierta o más cerrada.
Supongamos que a = 2. Le doy valores a x y me queda:

| X | $\|2X\|$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| -1 | 2 |




Es decir, al meter el 2 adentro hizo que la función se cerrara. La $|x|$ era así: → . La $|2x|$ es así: → .

¿ Cuál es la pregunta ? ¿ Qué para que sirve la función módulo ?
Rta: Eeehhhhmmm... Que se yo. Para nada. La matemática es así. Uno define cosas y después se pone a jugar con ellas. ¿ Cómo? ¿ Que ? ¿ Que estoy chapita ? Sí, sí, los matemáticos estamos re-chapitas ! ( Risas )

---

EL CASO DEL MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORME

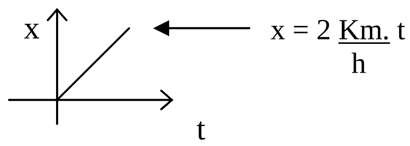
Este es un tema de física. ¿ Alguien cursa física ? En física la ecuación de la posición de un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme es:

$$x(t) = x_0 + v\,(t - t_0)$$

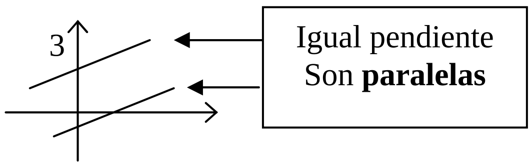
Esta es una función lineal. V es la velocidad del móvil y $x_0$ es la posición inicial. ( Es el lugar de donde salió). $t_0$ es la hora en el momento de salir.

Si tengo el caso de que $x_0 = 0$ y $t_0 = 0$ $\Rightarrow$ me queda: $x_{(t)} = v.t$

Esta es una ecuación del tipo y = m x . Acá a **y** yo la llamé **x** y a **x** la llamé **t**. Lo demás es lo mismo.
Si tuviera por ejemplo $x_{(t)} = 2\ Km/h.t$ , la representación sería:




Lo que tienen que ver acá es que si la velocidad del móvil es positiva, la recta va a ir así: . Si la velocidad fuera negativa, la recta iría así . Esto es porque en el gráfico x = f(t), la velocidad del movimiento es la pendiente. Si los 2 móviles tuvieran la misma velocidad pero uno estuviera 3 Km. más adelante que el otro, el gráfico quedaría:

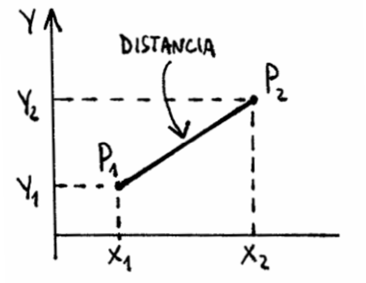



Esto es porque la velocidad es la PENDIENTE. Si los tipos tienen igual velocidad, las dos rectas deberán ser paralelas (no importa de donde hayan salido)

---

## DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS

Che, anoten esto porque lo toman. Supongamos que tengo 2 puntos $P_1$ y $P_2$. Las coordenadas del punto $P_1$ son ( $x_1$, $y_1$ ). Las coordenadas del punto $P_2$ son ( $x_2$, $y_2$ ).




Entonces la distancia que va de $P_1$ a $P_2$ se calcula con esta fórmula:

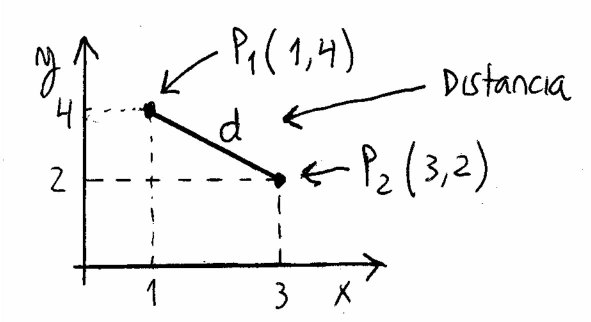
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

No voy a hacer la deducción de esta fórmula choclaza. Pero si lo pensás un poco, vas a ver que sale de plantear el teorema de Pitágoras en el triángulo formado entre los puntos $P_1$ y $P_2$.

Che, ahora ojo, entiendan lo que estoy diciendo. Cuando digo " calcular la distancia" me estoy refiriendo efectivamente a la distancia real que hay de un punto a otro.
O sea, la distancia que vos podrías ir y medir con una regla sobre el papel.
Vamos a un ejemplo:

CALCULAR LA DISTANCIA QUE HAY ENTRE
LOS PUNTOS $P_1$ ( 1 , 4 ) Y $P_2$ ( 3 , 2 )

Solución: Bueno, hago un dibujito y escribo la fórmula




La distancia va a ser: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

Entonces: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 1)^2}$

$\Rightarrow$ $d(P_1, P_2) = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8}$

Raíz de 8 es más o menos 2,82. Si hicieras el dibujito en escala en un papel, la distancia entre $P_1$ y $P_2$ medida con una regla te daría 2,82 cm.

---

# FUNCIONES LINEALES - EJERCICIOS DE PARCIALES

Vamos a resolver algunos ejercicios que saqué de parciales.

| L MATEMATICA | PRIMER PARCIAL | TEMA 4 |
|---|---|---|

APELLIDO: . . . . . . . . . . . NOMBRES: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . D. N. I: . . . . . . .

| 1 | 2 | 3 | 4 | NOTA |
|---|---|---|---|---|
| X | M | B- | B- | 4 (cuatro) |

INSCRIPTO EN : SEDE: CIUDAD . DIAS: Martes/Viernes
HORARIO: 20-23 . AULA: 319.

CORRECTOR: Evangelina .

*En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta*

**1)** Hallar todos los puntos de la recta y=3x que están a distancia $\sqrt{40}$ del origen de coordenadas.

**Solución:** Esos puntos están sobre la recta $y = 3x$ → son de la forma P = (a ,3a)

Nos dan la distancia al centro de coordenadas: $\sqrt{40}$ ( o sea, al punto (0 , 0)).

Entonces, usamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{(3a - 0)^2 + (a - 0)^2}$$

$$40 = 10\,a^2$$

$$a^2 = 4 \rightarrow |a| = \sqrt{4} = 2$$

Nos dan dos resultados para a. Entonces tenemos dos puntos:

$a = 2 \rightarrow$ $\boxed{P = ( 2,6)}$ y $a = -2 \rightarrow$ $\boxed{P = (-2,-6)}$

---

| M MATEMATICA | PRIMER PARCIAL | TEMA 2 |
|---|---|---|

APELLIDO:.................................NOMBRES:.........................................D.N.I:............................

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

INSCRIPTO EN: SEDE:.......................DIAS:.....................
HORARIO:...............AULA:.....................

CORRECTOR: ................................................

*En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta*

1. Escribir como intervalo o como unión de intervalos el conjunto $A = \{x \in R / \frac{4}{x} > 5\}$

**Solución:** Pasamos multiplicando la x $\rightarrow$ hay que ver las dos opciones

- Si $x > 0 \rightarrow 4 > 5x \rightarrow x < {}^{4}/_{5} \rightarrow x \in (0 ; {}^{4}/_{5})$

- Si $x < 0 \rightarrow 4 < 5x \rightarrow x > {}^{4}/_{5} \rightarrow$ no puede ser las dos cosas a la vez

Entonces, ese conjunto es igual a intervalo $\boxed{(0 ; {}^{4}/_{5})}$

---

MATEMATICA PRIMER PARCIAL TEMA 3

APELLIDO: [redacted] ....NOMBRES: .Fernanda........D.N.I: [redacted]

| 1 | 2 | 3 | 4 | NOTA |
|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | 10 (DIEZ) |

INSCRIPTO EN : SEDE:........DIAS:........

HORARIO:.........AULA: .1..

CORRECTOR: Andrea

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

**1.** Escribir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5}{x+4} < 1\}$ como intervalo o como unión de intervalos.

Solución: Nos piden que escribamos el conjunto A como un intervalo o unión de intervalos. Entonces:

$$\frac{5}{(x+4)} < 1$$

Despejemos: $\frac{5}{(x+4)} - 1 < 0$ Me conviene sacar denominador común ( x + 4 )

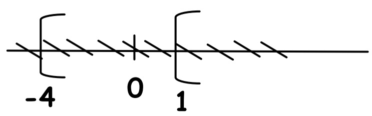
$$\Rightarrow \frac{5}{(x+4)} - \frac{1 \cdot (x+4)}{(x+4)} < 0 \Rightarrow \frac{5 - x - 4}{(x+4)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{x+4} < 0$$

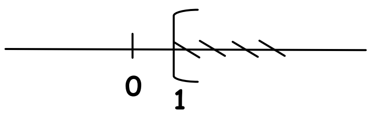
Para que toda la fracción sea negativa hay dos posibilidades:

Caso 1: $(1 - x) < 0$ y $(x + 4) > 0$

Despejando de $(1 - x) < 0$ me queda que $1 < x$, o sea $x > 1$. También se tiene que cumplir que $(x + 4) > 0$, o sea, $x > -4$. Representemos esto en una recta numérica:

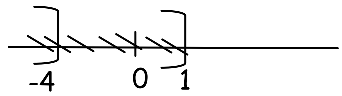



Muy bien. La solución que cumple con las dos desigualdades a la vez es $S_1 = (1 ; +\infty)$



<u>Caso 2</u>: Se tiene que cumplir que $( 1 - x ) > 0$ y $( x + 4 ) < 0$

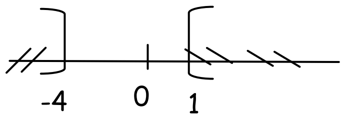
De $( 1 - x ) > 0$ me queda que $1 > x$ . De $( x + 4 ) < 0$ me queda que $x < - 4$.
Representemos en una recta las dos desigualdades:



La solución que cumple con las dos desigualdades es $S_2 = (-\infty \,; - 4 )$. Ahora bien la solución total es la unión de estos intervalos:

$$S_2 \cup S_1 = ( - \infty \,; - 4 ) \cup ( 1 \,, + \infty)$$

En la recta se vería así:

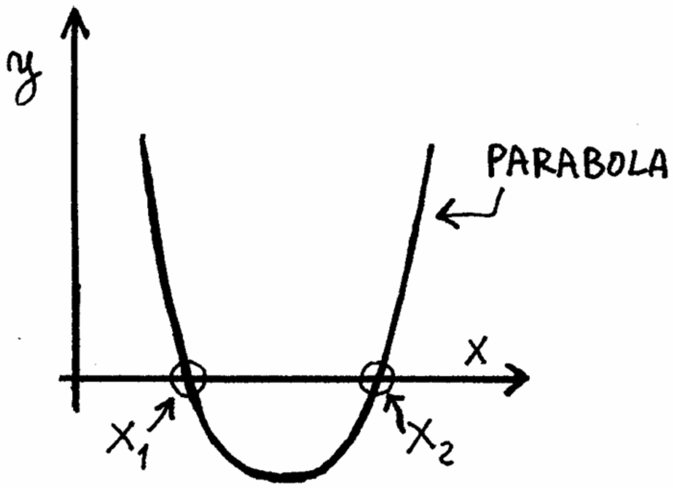


<u>Rta</u>: La solución al conjunto A es $(- \infty \,; - 4) \cup ( 1 \,, + \infty)$

FIN FUNCIONES LINEALES

# FUNCIONES

# CUADRÁTICAS




RAICES

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

SOLUCIÓN DE LA CUADRÁTICA

# FUNCIONES CUADRÁTICAS

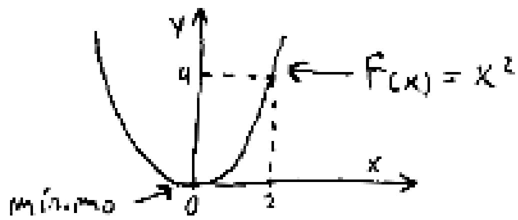
¿ Qué es una función cuadrática ? Rta: son las funciones que tienen esta forma:

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c} \longleftarrow \text{FUNCIÓN CUADRÁTICA}$$

Fíjense que el valor **a** no tiene que ser cero porque sino estaría en el caso de una función lineal. Siempre en las funciones cuadráticas el dominio serán los reales y el codominio también. El gráfico de una f cuadrática es una parábola.

Vamos a graficar una función cuadrática fácil $\Rightarrow$ Por ejemplo $y = x^2$
¿ Cómo hago ? Bueno, le voy dando valores a **x** y saco los de **y**. Formo esta tabla

| Y | X |
|---|---|
| 1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 4 | 2 |




Fíjense que el gráfico es simétrico. Es decir, de los dos lados es igual. La función $y = x^2$ tiene la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$. Lo que pasa es que acá **a** vale 1 y **b** y **c** valen cero. (es decir, tengo $y = 1.x^2 + 0.x + 0$). En el eje **x** uno mira el **dominio**. En el eje **y** uno mira la **imagen** y el **codominio**. Puedo decir, mirando el gráfico que:

Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

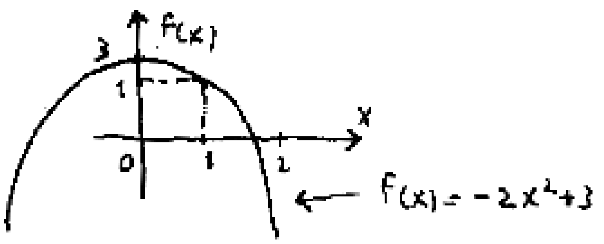
La imagen de f será: $Im(f) = [0, +\infty)$

Ojo, es importante que recuerdes la manera de escribir intervalos !

---

Vamos a graficar otra función cuadrática un poco más complicada: $y = -2\,x^2 + 3$.

Hacemos la tabla y el gráfico:

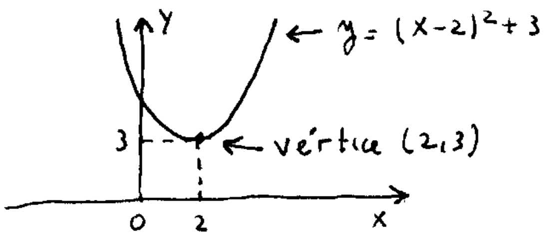



| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 1 |
| 2 | -5 |
| 3 | -15 |

La parábola va para abajo. Eso pasa porque el término **a** es negativo. Siempre que **a** sea negativo la parábola va a ir así: ∩ . ( Está triste ).
Si a es positivo la parábola va a ir para arriba. ( Sonríe )
El vértice de esta parábola está en el punto ( 0 , 3 ). El máximo está en x = 0. El eje de simetría es el eje **y**. La imagen de la función será: Im (f): $(-\infty, 3]$

---

OTRO EJEMPLO: Representar $y = (x - 2)^2 + 3$




| f(x) | x |
|---|---|
| 12 | -1 |
| 7 | 0 |
| 4 | 1 |
| 3 | 2 |

← Hago esta tabla

El ( x – 2) hace que toda la función se corra para allá → en dos unidades.
El +3 hace que toda la función se corra para arriba en 3 unidades.

El mínimo de la parábola está en x = 2. El eje de simetría es la recta x = 2.
La imagen de la función es Im (f) = $\mathbb{R} \geq 3$

La función $f(x) = (x-2)^2 + 3$ no parece tener la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sin embargo es una cuadrática. Fijate. Hago el cuadrado del binomio y veamos que da:

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3 = \underbrace{(x^2 - 2.2\,x + 2^2)}_{\text{cuadrado del binomio}} + 3$$

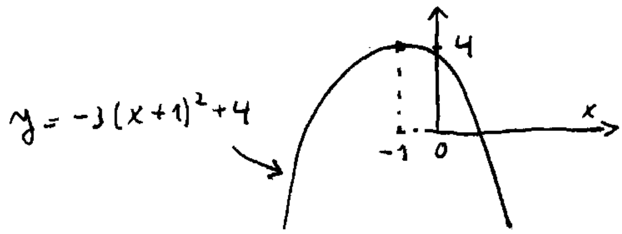
$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4\,x + 4 + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4\,x + 7$$

¿ Es lo mismo escribir la ecuación de cualquiera de las dos maneras ?
Rta: SI, es lo mismo. Lo que pasa es que si quiero graficar, la primera manera me permite hacerlo prácticamente sin tener que hacer una tabla.

---

Por ejemplo quiero que dibujen a ojo esta función: $Y = -3\,(x + 1)^2 + 4$. Vayan pensándolo. ¿ Listo ? Bueno. ¿ a ver que hicieron ?
El + 1 me dice que la función está corrida para allá ← en 1 unidad. El + 4 me dice que la parábola está corrida en 4 unidades para arriba. El - del 3 indica que va para abajo. De manera que el gráfico tiene que dar algo así:




¿ El 3 que significa ? Bueno, solamente me dice si la parábola va a ser más ancha o más angosta. ( así ⌒ o así ∩ )

Ahora quiero poner todo esto en forma general. Supongamos que tengo la parábola escrita en la forma $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$

Eso querrá decir que el vértice está en el punto $(\alpha,\beta)$

Ojo, $(\alpha , \beta )$, <u>NO</u> $(- \alpha , \beta )$. Recuerden esto.

Si **a** es positiva la cosa irá para arriba ∪ (sonriente ). Si **a** es negativa la cosa iría así ⌒ (triste).

El eje de simetría será la recta $x = \alpha$.

---

## <u>VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA</u>

Hay una cosa que se llama completar cuadrados. La deducción no la voy a hacer. Les voy a dar las fórmulas finales. Estas fórmulas sirven para escribir la parábola en la forma $y = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$, si a uno se la dan escrita en la forma $f(x)= ax^2 + bx +c$. Las dos fórmulas son:

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \leftarrow$$ COORDENADA EQUIS DEL VERTICE

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} \quad \leftarrow$$ COORDENADA <u>Y</u> DEL VERTICE

Vamos a hacer un ejemplo. Me dan la parábola $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x +7$. Tengo: $a = 2$ , $b = -4$ y $c = 7$. Entonces :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1 \quad \leftarrow X_v$$

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} = 7 - \frac{(-4)^2}{4 \cdot 2} = 7 - \frac{16}{8} = 5 \quad \leftarrow Y_v$$

$\Rightarrow$ La ecuación será:

$$F(x) = \overset{a}{\widehat{2}}\,(x - \overset{\alpha}{\widehat{1}}) + \overset{\beta}{\widehat{5}}$$

Tener formulitas así no es muy lindo. Vamos a ver esto. ¿ Cómo sé donde corta la parábola al eje x ? Rta: Bueno, tengo que aplicar una fórmula que te debés acordar. Es la fórmula de la resolvente de la cuadrática:

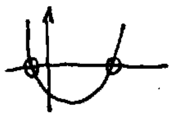
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a.}$$

Para una de las soluciones uso el signo +, y para la otra uso el signo - . De ahí saco las 2 raíces $x_1$ y $x_2$. Raíz quiere decir que ahí la función corta al eje x.

Hay 3 casos posibles. Puedo tener 2 raíces, 1 raíz o ninguna raíz.
¿ Cuándo tengo dos raíces ? Bueno, llamemos al término $b^2 - 4ac$, discriminante ($\Delta$).

* Si el discriminante es positivo, tendré dos raíces.
* Si el discriminante es cero, tendré una sola raíz
* Si el discriminante es negativo, no tendré ninguna raíz.

La representación de los 3 casos es:



$b^2 - 4ac = \oplus$ (2 raices)

$b^2 - 4ac = \ominus$ (ninguna raíz)

$b^2 - 4ac = 0$ (1 raíz)

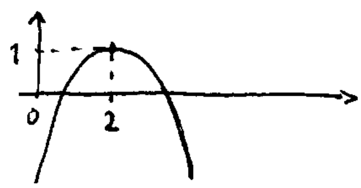
---

RECTA TANGENTE

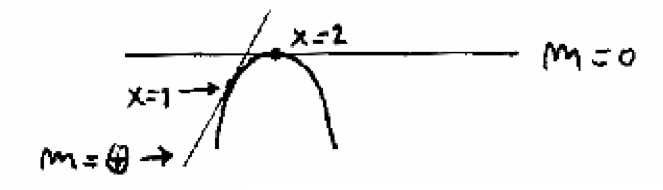
Es una recta que roza a la función en un punto. Es decir, no corta a la función, sino que pasa justo por ahí apenas tocándola. Por ejemplo:

← RECTAS TANGENTES

Supongamos que me dan: $f(x) = -(x-2)^2 + 1$.
Según lo que vimos el gráfico da así:

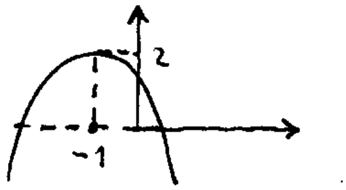


Si me piden trazar la recta tangente a la parábola en el punto x = 1 y x = 2 tendría que hacer lo siguiente:




Lo que quiero que veas es esto: cuando la función crece, la pendiente de la recta tangente va a ser positiva. Cuando la función decrece, la pendiente de la recta tangente va a ser negativa. ¿ y cuándo tengo un máximo o un mínimo que pasa ? Rta: Bueno, la pendiente de la recta tangente va a dar CERO. Todo esto lo vamos a usar mucho después cuando veamos derivadas e integrales.

Veamos un ejemplo:
Me dan la parábola y = - (x + 1) + 2. Me piden graficarla. Eso da así:




$X_v = -1$

$Y_v = +2$

Las coordenadas del vértice son x = -1 e y = 2. Las escribo de la otra manera:

$$f(x) = -(x+1)^2 + 2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x - 1 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x + 1$$

¿ Cuáles son las raíces ? Bueno aplico la formulita:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$a = -1,\ b = -2,\ c = 1$

Eso da:

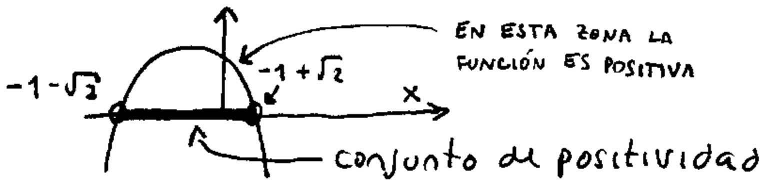
$$X_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,(-1)\,1}}{2.(-1)}$$

$$\Rightarrow X_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} \leftarrow$$

RAICES DE LA ECUACIÓN

## CONJUNTO DE POSITIVIDAD

Son los valores de x en donde la función es positiva. Para saber donde una función es positiva, lo que tengo que hacer es mirar el gráfico y ver si la curva está por arriba o por debajo del eje x. Eso es todo.
Si miran el gráfico van a ver que la función toma valores positivos para los valores de x comprendidos entre las dos raíces. Es decir:




Al conjunto de positividad lo vamos a designar como $C_+$ y en este caso va a ser:

$$C_+ = \left(-1-\sqrt{2}\,,\ -1+\sqrt{2}\right) \quad \longleftarrow \quad \text{CONJUNTO DE POSITIVIDAD.}$$

También podemos hablar de conjunto de negatividad. Ese conjunto serían los valores del dominio tales que en ellos la función es negativa. Lo designamos como $C_-$ y en este caso sería:

$$C_- = \left(-\infty\,,\ -1-\sqrt{2}\right) \underset{\text{unión}}{\cup} \left(-1+\sqrt{2}\,,\ \infty\right)$$

El lugar donde la función no es positiva ni negativa son los x tal que en ellos la función corta al eje x. Lo designamos como $C_0$ y en este caso sería:

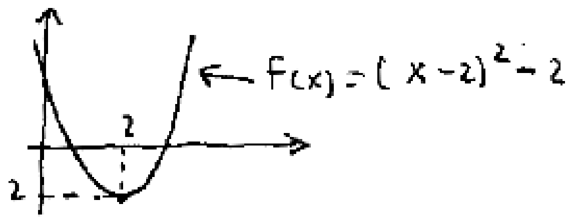
$$C_0 = \left\{-1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}\right\}$$

---

Vamos a este otro ejemplo:

Hallar el conjunto de positividad de la parábola: $f(x) = ( x - 2 )^2 - 2$

Lo primero que hago es graficar la función. Veo que va para arriba y está corrida en 2 a la derecha y en 2 para abajo. Ahora hago el dibujo.



Para saber donde corta la parábola al eje equis, desarrollo el binomio al cuadrado. Lo hago para tener escrita a f en forma de $ax^2 + bx + c$.

$$f(x) = (x - 2)^2 - 2 = (x^2 - 2.2\,x + 4) - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 4 - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Tengo así: $a = 1$ $b = -4$ $c = 2$

Hago la fórmula – b ± etc, etc y me queda:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \qquad x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Los conjuntos de positividad y negatividad van a ser:

$$C_+ = (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

$$C_- = (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$C_0 = \{2 - \sqrt{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\}$$

Esto no es difícil. Hagan los ejercicios de la guía. Es siempre lo mismo. Grafican la parábola, se fijan donde corta al eje x y después hallan los conjuntos de positividad y negatividad.

---

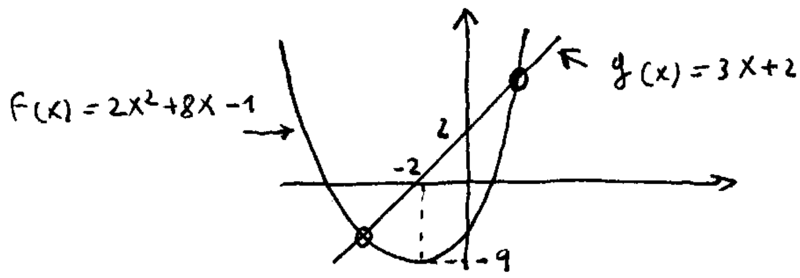
## INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA

Una recta y una parábola se pueden cortar o no. Tengo los siguientes casos:


Vamos a hacer un ejemplo:

HALLAR LA INTERSECCIÓN ENTRE LA RECTA
$g(x) = 3x + 2$ Y LA PARÁBOLA $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$

Bueno, lo que hago es graficar la recta y la parábola y ver donde se cortan.




Lo que hice fue resolver el ejercicio gráficamente. Ahora quiero resolverlo analíticamente. ¿ Qué hago ? A ver, piensen. Claro, tengo que igualar las dos ecuaciones y despejar x. Entonces: Hago $f(x) = g(x)$ :

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x - 1 = 3x + 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x - 3x - 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Aplico la fórmula para las raíces de la ec. cuadrática y me da:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \qquad a = 2,\ b = 5,\ c = -3$$

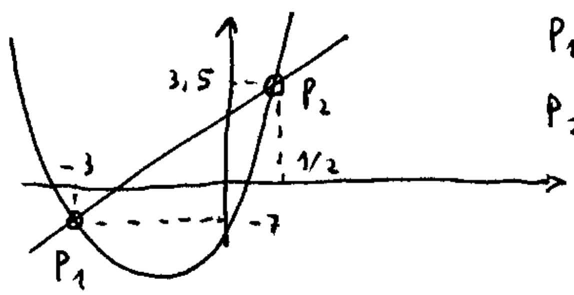
$$\Rightarrow \underline{x_1 = -3} \ ; \ \underline{x_2 = \frac{1}{2}}$$

Estas son las coordenadas de **x** donde se cortan la recta y la parábola. Para hallar las coordenadas **y**, lo que hago es reemplazar $x_1$ y $x_2$ en la ecuación de f(x) o de g(x). Si hice todo bien, tendría que dar lo mismo. Si hago eso me da:

$$g_{(-3)} = 3(-3) + 2 = -7$$

$$g_{(1/2)} = 3(1/2) + 2 = 3.5$$

Entonces, los puntos de encuentro son:




$$P_1 = (-3, -7)$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{2} ; 3{,}5\right)$$

Quiero que veas ahora otra aplicación de todo este tema de funciones cuadráticas. Vamos a hacer el problema del rendimiento de la nafta.

---

PROBLEMA:

EL RENDIMIENTO DE NAFTA r (EN Km/LITRO) DE UN AUTOMOVIL ESTÁ RELACIONADO CON LA VELOCIDAD ( EN Km/h ) POR LA FUNCIÓN:

$$r(v) = -1/3\ v^2 + 60\ v \qquad \text{con } 0 < v < 180$$

a) HALLAR LOS VALORES DE v PARA LOS CUALES EL RENDIMIENTO DE NAFTA AUMENTA CON v Y LOS VALORES DE v PARA LOS CUALES EL RENDIEMIENTO DE NAFTA DISMINUYE.
b) HALLAR LA VELOCIDAD PARA LA CUAL EL RENDIEMITNO ES MÁXIMO Y CACULAR DICHO RENDIMIENTO.

a) Tengo que graficar la función $r(v) = -1/3\ v^2 + 60\ v$. Esto me va a dar una parábola que va para abajo. Fijate que el domino está restringido (la función solo ∃ para valores de v comprendidos entre 0 y 180 Km/h.

Para graficar, hago lo de siempre. Calculo las coordenadas del vértice.

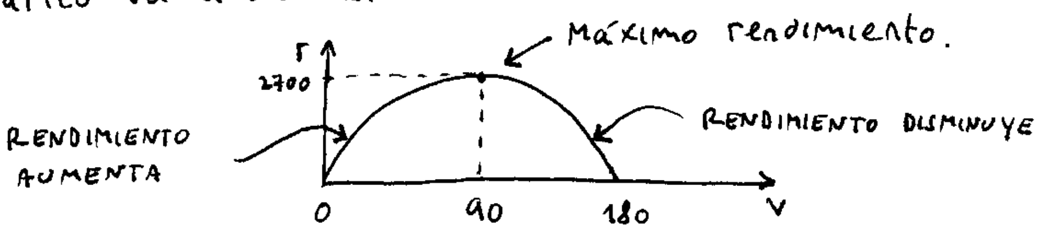
$$X_V = \frac{-b}{2a} \quad y \quad Y_V = c - \frac{b^2}{4a}$$

Haciendo las cuentas me da:

$$X_V = \frac{-60}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} = 90$$

$$Y_V = 0 - \frac{(-60)^2}{4\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-3600}{-\frac{4}{3}} = +2700$$

El gráfico va a dar así




a) Entonces veo que el rendimiento de nafta aumenta en ( 0, 90 ) y disminuye en ( 90, 180 ).

b) La velocidad para la cual el rendimiento es máximo es v = 90 Km/h. El máximo rendimiento será r = 2.700 Km/L.

---

<u>PROBLEMA</u>: Se lanza una pelota desde 25 m de altura. Piden hacer el gráfico de la posición en función del tiempo y preguntan en que momento la pelota vuelve a estar a 25 m de altura. Dan como dato la ecuación de la posición en función del tiempo que es: $s(t) = -16\,(t-3)^2 + 169$ Para $t \geq 0$

Hago el gráfico de esto. Las coordenadas del vértice son ( 3, 169 ). Vamos a ver dónde corta esta función al eje t. En este caso como tengo expresada la función en la forma $y = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$. Puedo directamente despejar directamente $(t - 3)^2$ sin usar la fórmula para la ecuación cuadrática. Igualo a cero:

$$-16\,(t-3)^2 + 169 = 0$$

$$\Rightarrow -16\,(t-3)^2 = -169$$

$$\Rightarrow (t-3)^2 = \frac{169}{16}$$

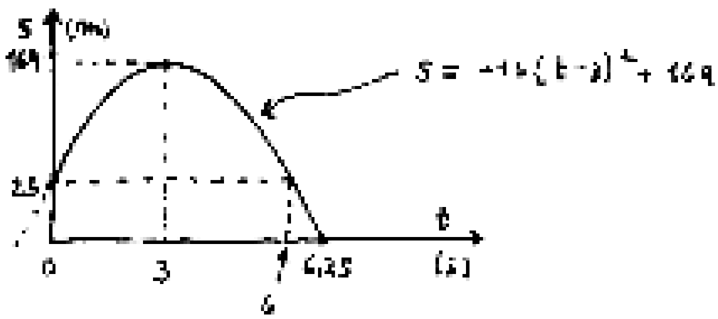
Los 2 signos menos se cancelan. Ahora lo que no se tienen que olvidar es que cuando pasan el $^2$ al otro lado como raíz cuadrada, esa raíz tiene <u>doble signo.</u>

Miren:

$$(t-3)^2 = \frac{169}{16} \quad \Rightarrow t - 3 = \pm\sqrt{\frac{169}{16}} \quad \Rightarrow t_{1,2} = 3 \pm 3{,}25$$

Si hubiera hecho esto aplicando la fórmula para la ecuación cuadrática ... ¿ me hubiera dado lo mismo ?

Rta: Sí, claro. <u>TIENE QUE DAR LO MISMO</u>. (Probalo). El gráfico queda:




Si me preguntan en que momento pasa otra vez por la posición s = 25 m, la respuesta es a los 6 segundos. Eso lo veo mirando el gráfico. Uno puede evaluar s = 25 m en la ecuación, pero yo quiero que vean que la parábola es simétrica alrededor de la recta vertical x = 3. Por eso sé que a los 6 segundos va a volver a estar a los 25 m.
De cualquiera de las 2 maneras que lo hagan está bien. Pero no se olviden este asunto de la simetría de las parábolas. Puede ser que lo tengan que usar en algún caso, como por ejemplo en éste de recién.

FUNCIONES CUADRATICAS - EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

**2.** Dar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y=(x+1)(x+7)$ y por el punto en que dicha parábola corta al eje $y$.

Este ejercicio no es complicado, sólo tenés que leer bien el enunciado y ordenar lo que te piden. Vamos. Tenemos que encontrar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola y = (x +1) (x + 7) y pasa por el punto en que la parábola corta al eje y.

Calculemos el vértice de la parábola. Como la parábola es simétrica, las raíces van a estar a la misma distancia del vértice. Entonces a $x_v$ la podemos calcular así:

$$\boxed{x_v = \frac{(x_{raíz\ 1} + x_{raíz\ 2})}{2}}$$

Como la parábola está escrita como un producto, las raíces están a la vista:

$$x_{raíz\ 1} = -1 \quad y \quad x_{raíz\ 2} = -7$$

Reemplazando en la ecuación para calcular el vértice:

$$x_v = \frac{(-1) + (-7)}{2}$$

$$x_v = -4$$

Para calcular $y_v$ reemplazamos en la ecuación de la parábola y = (x +1) (x + 7)

$$y_v = (-4 + 1)(-4 + 7)$$

$$y_v = -9$$

Llegamos a uno de los puntos por los que pasa la recta es: $P_1 = (-4, -9)$. Busquemos el punto donde la parábola corta al eje y, esto ocurre cuando x = 0.

$$y = (0 + 1)(0 + 7)$$

$$\Rightarrow \quad y = 7$$

El otro punto por el que pasa la recta es: $P_2 = (0, 7)$. Con estos dos puntos podemos construir la recta. Bueno, lo que hago es escribir la ecuación de una función lineal: f(x) = m x + b. Reemplazo ahora por los valores de $P_1$ y $P_2$:

$$f(-4) = m.(-4) + b = -9$$

$$f(0) = m.0 + b = 7$$

Esto es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} -4m + b = -9 \\ b = 7 \end{cases}$$

Reemplazo b en la 1er ecuación para calcular m

$\Rightarrow \quad -4m + b = -9 \quad \Rightarrow \quad -4m + 7 = -9$

$\Rightarrow -4m = -9 - 7$

$\boxed{m = -16}$ ⟵ VALOR DE LA PENDIENTE

Rta : La ecuación de la recta queda así $\boxed{y = -16x + 7}$

---

**2)** Sea la función cuadrática f cuyo gráfico es la parábola de vértice V=(-4,-2) que pasa por el punto (-3,16). Hallar el conjunto de ceros y el conjunto de positividad de la función f.

La función cuadrática tiene esta forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tenemos tres incógnitas: a, b y c. Entonces, necesitamos tres ecuaciones. Las sacamos de los datos que nos dan:

- Pasa por el punto (-3 , 16) $\rightarrow f(-3) = a(-3)^2 + b(-3) + c = 9a - 3b + c = 16$
- La abscisa del vértice es - 4 $\rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = -4$
- Pasa por el punto (-4 , -2) $\rightarrow f(-4) = a(-4)^2 + b(-4) + c = 16a - 4b + c = -2$

Si resolvemos este sistema de tres ecuaciones, nos queda la función

a = 18, b = 144 y c = 286

$\rightarrow \quad f(x) = 18x^2 + 144x + 286$

Los ceros de esta función los podemos calcular con la formulita:

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow$ Los ceros son $-^{11}/_3$ y $-^{13}/_3$

El dominio nos queda dividido en tres intervalos (lo dividimos en los ceros).

Vemos que es positiva en $\boxed{(-\infty, -^{13}/_3) \cup (-^{11}/_3, +\infty)}$

---

2. Sea f(x)= $\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+c$ .Hallar el valor de c ϵ R de manera que la imagen de f sea el intervalo [-3;+∞). Para el valor de c encontrado,hallar el conjunto de positividad de f

La función tiene un mínimo en el vértice. La abscisa del vértice la calculamos como $x_v = -\frac{b}{2a}$. En este caso, nos da $x_v = -1$

Entonces, el mínimo valor de la función va a ser

$$f(-1) = {}^3/_4\,(-1)^2 + {}^3/_2\,(-1) + c = c - {}^3/_4$$

Nos piden que la imagen de la función sea [-3 ; +∞) → el mínimo es -3

$$c - {}^3/_4 = -3 \quad \rightarrow \quad c = -3 + {}^3/_4$$

$$\rightarrow \boxed{\mathbf{c = -{}^9/_4}}$$

Entonces, la función nos queda $f(x) = {}^3/_4\,x^2 + {}^3/_2\,x - {}^9/_4$

Calculamos los ceros: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow 1$ y - 3

El dominio nos queda dividido en tres intervalos:

(-∞ ; -3) → $f(-4) = {}^{15}/_4 > 0$
(-3; 1) → $f(0) = -{}^9/_4 < 0$
(1; +∞) → $f(2) = {}^{15}/_4 > 0$

El conjunto de positividad es **(-∞ ; -3) U (1 ; +∞)**

---

FIN FUNCIONES CUADRÁTICAS